Eva Sattlberger und Stefan Götz, Wien

ERBEG — Erklären und Begründen im Mathematikunterricht

Zusammenfassung

Die mathematischen Grundtätigkeiten Erklären und Begründen sind so alt wie die Mathematik selbst, in gewisser Weise machen sie geradezu die Mathematik aus. Dementsprechend umfangreich ist auch die fachdidaktische Literatur zu diesem Thema, was kann also in diesem Beitrag noch dazu gesagt werden? — Bei der schriftlichen Reifeprüfung in Mathematik soll auch begründet werden, daher müssen die Schüler/innen darauf vorbereitet werden. Die Vorlaufzeit dafür kann gar nicht lange genug veranschlagt werden, und so werden im Beitrag Beispiele und Aufgaben zum Begründen aus (fast) allen acht Klassen AHS und für die schriftliche Reifeprüfung präsentiert. Dabei wird sich zeigen, dass oft „ganz normale" Aufgaben durch geringfügige Akzentverschiebungen, bestimmte Betonungen zum Begründen anregen können.

Am PI Wien hat sich zu diesem Thema eine Initiative konstituiert („ERBEG"), der die beiden Autor/innen (neben anderen Vertreter/innen aus dem AHS-Bereich) angehören.

1 Einführung

Befragt man verschiedene Personen, welche ihre schulische Laufbahn bereits hinter sich haben, nach Charakteristika des Mathematikunterrichts, so werden sehr oft Tätigkeiten wie „Beweisen" und „Begründen" genannt. Werden im Gegensatz dazu Mathematiklehrer/innen gefragt, ob sie im Mathematikunterricht mit Beweisen arbeiten, so wird dies oft verneint. Ein Grund für diese (scheinbar) einander widersprechenden Antworten könnte in *unterschiedlichen Definitionen* der Begriffe liegen. Was versteht man also unter dem Begriff „Beweisen"? — Und was ist mit „Begründen" gemeint? Sind diese Begriffe *in ihrer Verwendung* nicht genau definiert, so versteht jeder/jede etwas anderes darunter. In der Schulmathematik verwendet man vor allem die Begriffe „Erklären", „Argumentieren", „inhaltliches Schließen" oder — sanfter — „Begründen".

Ein anderer Zugang ist sich zu fragen, was ein Beweis, eine Begründung, Erklärung oder Argumentation *bewirken* soll. Hier wäre einerseits die *Überzeugungsfunktion* zu nennen, man will also jemanden von der Richtigkeit einer Behauptung überzeugen. Andererseits soll auf Grund einer Begründung erkannt werden, dass etwas aus etwas anderem hergeleitet werden kann. Es ergibt sich daraus eine *Zusammenhang stiftende* Funktion. Die Trennung dieser beiden Ziele ist für den Umgang mit diesen Begriffen wichtig.

1.1 Argumentationsbasis und Exaktheit

Jede Begründung bedarf einer bestimmten Argumentationsbasis. Sie ist das Fundament auf welches sich die Argumentationslinie stützt. Dabei gibt es verschiedene Arten von Argumentationsbasen: In der höheren Mathematik z. B. sind dies Axiome und (schon bewiesene) Sätze. Auf einer niedrigeren Ebene können Handlungen, Bilder oder auch Realitätserfahrungen als Argumentationsbasen dienen (vgl. [MAL], S. 5). Soll z. B. die Gleichung $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ begründet werden, so kann durchaus das bekannte Tortenmodell in niedrig(er)en Klassenstufen ausreichend sein. Wichtig ist dabei, den Schüler/innen klar zu machen, worauf sie sich beziehen können und was diesbezüglich von ihnen erwartet wird. Sinnvoll ist es sich etwa bis zur achten Schulstufe eher auf die Zusammenhang stiftende Funktion zu beschränken und in den höheren Klassen mehr und mehr auf die Überzeugungsfunktion überzugehen.

Was die *Exaktheit* betrifft, so kann man über die Exaktheit einer Begründung nur im Zusammenhang mit einer bestimmten Argumentationsbasis sprechen. Exaktheit hat zu tun mit der Explikation der Argumente. Eine Begründung ist also umso exakter, je detaillierter die Begründungsschritte ausgeführt werden und je deutlicher dabei der Bezug zur jeweiligen Argumentationsbasis ersichtlich ist (vgl. [MAL], S. 6).

1.2 Ein schrittweiser Prozess

Prinzipiell sollte immer zwischen Lern- und Prüfungssituationen unterschieden werden und zwischen schriftlichen und mündlichen Leistungen. Bei mündlichen Leistungen (Prüfungen und dergleichen) wollen Lehrer/innen vor allem meist Erklärungen von bestimmten Sachverhalten. Diese Erklärungen wurden aber oft im fragend entwickelnden Unterricht erarbeitet, in dem Schüler/innen als Stichwortgeber/innen für Erklärungen fungieren, ohne dass dabei Kausalzusammenhänge erkannt werden. In Lernsituationen werden also von den Schüler/innen meist nicht eigenständige Erklärungen gefordert, in Prüfungssituationen sehr wohl.

Zuerst steht also das *selbstständige Finden* von Begründungen für bestimmte Zusammenhänge im Vordergrund, was in ausreichendem Maße geübt werden muss. In Lernsituationen können dabei Fehler gemacht werden, unterschiedliche Lösungswege werden zugelassen und (gemeinsam) diskutiert. Der nächste Schritt ist das *exakte Verschriftlichen* — das ordentliche Formulieren — dieser Begründungen. Studien zeigen dabei, dass Schüler/innen große Schwierigkeiten beim Formulieren haben, obwohl ausreichend Faktenwissen vorhanden ist. Als mögliche Lösungswege bieten sich für das *mündliche* Formulieren geleitete Gruppenarbeiten, Erklärungen von Sachverhalten in Partner/innenarbeit oder Präsentationen von Rechengängen oder Ergebnissen an. Die Schüler/innen verwenden dabei ihre eigene (Fach-)Sprache. *Schriftliche* Formulierungen können durch das Begründen von Vorgangsweisen bei Hausübungsaufgaben oder durch das Erstellen eines „Protokolls“ für die Ergebnisfindung einer Aufgabe geübt werden. Wichtig dabei ist das langsame Heranführen der Schüler/innen an diese Vorgehensweise durch kleine Schritte.

1.3 Sechs Phasen der Beweisführung ([BOE], S. 6)

1. *Vertraut werden mit den involvierten Begriffen/Objekten*
   Hierbei handelt es sich um die Exploration der Problemstellung, eine Phase, die je nach Schwierigkeitsgrad mehr oder weniger lang dauern kann, für die Lösung des Problems aber überaus wichtig ist.

2. *Erkennen und Formulieren einer Vermutung oder eines Verdachts*
   Dies kann auf zwei Arten geschehen. Entweder ist die Vermutung bereits vorgegeben oder sie soll von den Schüler/innen selbstständig formuliert werden. Es müssen dabei alle bereits getroffenen formalen Konventionen beachtet werden.

3. *Suche nach Zusammenhängen: Woran erinnert das?*
   Diese Phase beinhaltet das Explorieren der (vermeintlichen) Umgebung und das Sammeln von möglichen Argumenten und Zusammenhängen. Sie entspricht dem Kernbereich des mathematischen Arbeitens (Betrachten der Inhalte und geeigneter Methoden zur Lösung).

4. *Auswahl der relevanten Informationen*

5. *Organisation — Aufstellen einer schlüssigen Argumentationskette*
   Waren die Argumente in Phase 4 relevant, so entspricht dies dem zielgerichteten Ergebnis des Explorationsprozesses. Ist dies nicht der Fall, so muss man wieder bei Phase 3 bzw. 4 beginnen und nach anderen Informationen suchen.

6. *Formulieren einer endgültigen Fassung*
   Hier sollen die Fragen „Was wird behauptet?“, „Welche Voraussetzungen gibt es?“ und „Welche Argumentationsbasis wurde verwendet?“ der Reihe nach abgehandelt werden.

Wichtig bei diesen sechs Phasen ist einerseits die Klarstellung an welcher Stelle das Problem bereits gelöst ist und ab welchem Punkt nur mehr eine Vereinfachung der Darstellung stattfindet und andererseits die Betonung der Wichtigkeit einer strategischen Planung. Diese Vorgangsweisen müssen geübt und den Schüler/innen bewusst gemacht werden, Einzel- bzw. Partner/innenarbeitsphasen eignen sich dazu besonders gut.

2 Aufgaben für die erste Klasse

Eine Voraussetzung für Begründen und Argumentieren ist das Beschreiben können eines Sachverhalts. Dies stellt den ersten Schritt zum Verständnis dar und entspricht den oben beschriebenen Phasen 1 und 2. Eine Möglichkeit Schüler/-innen der ersten Klasse an die Strukturen einer Beweisführung zu gewöhnen ist das Üben des Beschreibens von Sachverhalten.

- „Primzahlzwillinge" sind Primzahlen, deren Differenz zwei ist (z. B. 11 und 13). Versuche mindestens fünf solcher Primzahlzwillinge zu finden! Beschreibe wie du dabei vorgegangen bist! Was fällt dir auf, was die jeweils mittlere Zahl betrifft?

  Dieser Aufgabe kann die Suche der Primzahlen bis 50 vorangegangen sein, damit ein Konnex hergestellt werden kann.

- Kleine Veränderungen an „herkömmlichen" Aufgaben:

  - Berechne die Summe der Zahlen 289 und 3 508! Wie ändert sich die Summe, wenn der erste Summand um 35 vergrößert wird?
  - Berechne die Summe der Zahlen 4 988 und 576! Wie ändert sich die Summe, wenn der zweite Summand um 78 vergrößert wird?

  Fällt dir bei den Änderungen der Summe etwas auf? Versuche zu beschreiben! Überprüfe deine Vermutung an einem *selbst* gewählten Beispiel!

  Mit der Umformulierung dieser Aufgaben werden Teile der Beweisführung (Phasen 1, 2, 3 und 4) herausgenommen und mit den Schüler/innen besprochen.

- Die Zahlen 6 und 15 sind durch 3 teilbar. Überprüfe, ob auch

  a) die Summe dieser Zahlen durch 3 teilbar ist,
  b) die Differenz dieser Zahlen durch 3 teilbar ist,
  c) das Produkt dieser Zahlen durch 3 teilbar ist.
  d) Erstelle zu den obigen Aufgaben einen entsprechenden Merksatz!

- Ein Band von Lisas neuem Lexikon ist 7,5 cm breit und wiegt 1,6 kg.

  a) Ihr Bücherregal ist 120 cm breit. Kann sie darauf alle zwölf Bände nebeneinander aufstellen?
  b) Das Regalbrett darf höchstens mit 20 kg belastet werden. Ist es für alle zwölf Bände stabil genug? (Aus [KEL], S. 158.)

  Bei dieser Aufgabe müssen verschiedene Aspekte (Gewicht und Breite) beachtet werden, was Schüler/innen in der Regel nicht immer sofort klar ist.

3 Der „berühmteste“ Beweis im Mathematikunterricht und eine Alternative: 4./5. Klasse

Bekanntlich gilt

Satz 1.

$$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q} .$$

Der in Schulbüchern verbreitete *Beweis* verläuft indirekt, angenommen $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ mit $\mathrm{ggT}(m, n) = 1$. Dann kann ein Widerspruch zu $\mathrm{ggT}(m, n) = 1$ gefunden werden, siehe z. B. [GOE2], S. 65. □

Nun wird immer wieder kritisiert, dass die Widerspruchsfindung hier nicht sehr überzeugend verläuft. Einsichtiger ist es, die Annahme, dass $\sqrt{2}$ rational sei, direkt ad absurdum zu führen. Ebenfalls z. B. in [GOE2], S. 65, findet sich eine Alternative, die ohne diese Voraussetzung, dass ein gekürzter Bruch für $\sqrt{2}$ vorliegt, auskommt.

Wir beginnen wieder mit $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ oder notieren besser gleich $2n^2 = m^2$ für irgendwelche natürlichen Zahlen m und n, beide ungleich null. Zu zeigen ist nun, dass es solche $m \in \mathbb{N}$ und $n \in \mathbb{N}$ nicht gibt. Dazu argumentieren wir so: m^2 muss also gerade sein, also auch m. (Diesen Hilfssatz benötigt man auch in der ersten Version des Beweises.) Wir schreiben $m = 2k$ und erhalten so $2n^2 = 4k^2$, woraus $n^2 = 2k^2$ folgt. Also ist auch n^2 und somit n gerade, wir formulieren $n = 2l$. Damit haben wir insgesamt $\sqrt{2} = \frac{m}{n} = \frac{2k}{2l} = \frac{k}{l}$ erreicht bzw. $2l^2 = k^2$. Und jetzt geht das Spiel von vorne los, sodass der ursprüngliche Bruch immer wieder durch zwei gekürzt wird, was natürlich nicht sein kann, die natürlichen Zahlen brechen ja bei eins ab. Also kann es keinen solchen Bruch geben. □

Bemerkung: Dahinter steckt das sogenannte *Prinzip (der Unmöglichkeit) des Unendlichen Abstiegs,* das besagt (aus [KUB], S. 105): Um nachzuweisen, dass keine natürliche Zahl eine gewisse Eigenschaft $\mathcal{E}$ besitzen kann, genügt es Folgendes zu zeigen: Wenn irgendeine natürliche Zahl n die Eigenschaft $\mathcal{E}$ besitzt, dann gibt es auch eine natürliche Zahl m kleiner als n mit der Eigenschaft $\mathcal{E}$.

Mit ein bisschen „Schwindeln“ geht es schneller: Wieder gehen wir von $2n^2 = m^2$ aus für m, n natürliche Zahlen ungleich null und bemerken, dass der Primfaktor 2 links in ungerader, rechts dagegen in gerader Anzahl (die auch null sein kann) auftritt. Das kann aber nicht sein. □

Hier verwenden wir die Argumentationsbasis der (Existenz und) Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung natürlicher Zahlen, der Beweis dafür ist schon ein wenig aufwändiger: siehe z. B. in [KUB], S. 108 ff.

4 Vom anschaulichen zum formalen Beweis: 2./5. Klasse

Fast ebenso populär wie Satz 1 ist

Satz 2. *Eine natürliche Zahl ist (genau dann) durch 9 teilbar, wenn ihre Ziffernsumme durch 9 teilbar ist.*

Im Folgenden wollen wir nun auf verschiedenen Argumentationsbasen diesen Satz begründen bzw. vorbereiten:

1. Wir beginnen mit paradigmatischen Beispielen, die eine Vermutung aufkommen lassen können: $9 \mid 36$, $9 \nmid 37$, $9 \mid 99$, $9 \nmid 100$.

2. Legen wir dann Spielmarken auf einen Tisch, z. B. 36, und zwar so, dass jeweils zehn in einer Reihe liegen bis eventuell auf eine (die letzte) Reihe (siehe Abbildung 1):

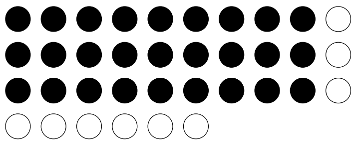

Abbildung 1: 36 mit Spielmarken dargestellt

   Man *sieht*: Die Ziffernsumme bleibt übrig (und das ist „immer" so!)!

3. Wenn wir die Abbildung 1 im dekadischen Zahlensystem darstellen, so stellt sich der Sachverhalt so dar:

$$36 = 3 \cdot 10 + 6 \cdot 1 = 3 \cdot 9 + \underbrace{3 + 6}_{\text{Ziffernsumme}}$$

4. Die Mathematik lebt von Verallgemeinerungen, also noch einmal mit Variablen:

$$ab = a \cdot 10 + b \cdot 1 = a \cdot 9 + \underbrace{a + b}_{\text{Ziffernsumme}}$$

5. Letztlich wollen wir uns nicht auf zweistellige Zahlen beschränken:

$$\begin{aligned} & (a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0)_{10} = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 1 = \\ = \; & a_n \cdot \underbrace{(10^n - 1)}_{9|} + a_{n-1} \cdot \underbrace{(10^{n-1} - 1)}_{9|} + \cdots + \underbrace{a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0}_{\text{Ziffernsumme}} \end{aligned}$$

Die Punkte stehen hier für endlich viele Ziffern bzw. Summanden, oft können sie auch für unendlich viele stehen. Es liegt viel Abstraktionsvermögen in der Fähigkeit, die Punkte richtig zu lesen und dann auch selbst einzusetzen. Der Sprung von 4. nach 5. ist nicht zuletzt deswegen ein großer.

5 Apropos „Teilen“: 5. Klasse

Die in der Zusammenfassung erwähnte Initiative hat sich auf eine Klassifizierung der Beispielaufgaben geeinigt, die nun an einem konkreten Thema, nämlich dem Untersuchen von Teilbarkeitsfragen, wie es in der fünften Klasse im Realgymnasium gefordert wird, vorgestellt wird.

5.1 Vorkenntnisse

Wir benötigen

- die Modulo-Schreibweise und grundlegendes Wissen über die damit verbundenen Restklassen,
- elementare Teilbarkeitsregeln wie z. B. $6|n \Leftrightarrow 2|n \wedge 3|n$, für die ein *Beweis* so aussehen kann:

  $\Longrightarrow$: $6|n$, also $n = 6 \cdot k$ für ein $k \in \mathbb{N}$, daraus sehen wir $n = 2 \cdot 3 \cdot k$, was $2|n \wedge 3|n$ zur Folge hat;

  $\Longleftarrow$: $2|n \wedge 3|n$, wegen $\mathrm{ggT}(2,3) = 1$ ist $n = 2 \cdot 3 \cdot k = 6 \cdot k$ für ein $k \in \mathbb{N}$, also $6|n$. $\square$

- das Rechnen mit Resten kann umgangen werden (siehe unten!) und
- die Definition einer Primzahl.

5.2 Eigentliche Aufgaben

1. Wann ist i) die Summe, ii) das Produkt von drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen durch 6 teilbar (aus [GOE2], S. 55)?

   ad i) Die Summe macht wenig Schwierigkeiten:

   $$\mathbf{S} = n + (n+1) + (n+2) = 3 \cdot n + 3 = \mathbf{3} \cdot (\mathbf{n} + \mathbf{1}) \ ,$$

   was uns auf $6|S \Longleftrightarrow n+1$ gerade $\Longleftrightarrow n$ ungerade bringt.

ad ii) Das Produkt

$$\mathbf{P} = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{n}+\mathbf{1}) \cdot (\mathbf{n}+\mathbf{2})$$

dagegen sträubt sich etwas mehr:

- $3|n \wedge 2|n$: fertig, siehe oben!
- $3|n \wedge 2 \nmid n \longrightarrow 2|n+1$: fertig!
- $3 \nmid n$:

$$\begin{aligned} 1 \equiv n\ (3) \to 0 \equiv n+2\ (3) &: \text{ fertig} \\ 2 \equiv n\ (3) \to 0 \equiv n+1\ (3) &: \text{ fertig} \end{aligned}$$

Also ist $6|P\ \forall n \in \mathbb{N}$.

War das zu schnell? — Warum ist eigentlich

$$1 \equiv n\ (3) \longrightarrow 0 \equiv n+2\ (3)\ ?$$

Was steckt dahinter? Wie kann dieses Rechnen mit Resten erklärt werden? — Dazu

(a) stellen wir zuerst eine *Vermutung* auf, indem wir die Reste von kleinen Zahlen bei Division durch 3 notieren:

$n \in \mathbb{N}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Rest bei Division durch 3	1	2	0	1	2	0	1	2	0

Die Reste 0,1 und 2 treten also periodisch auf. Jetzt folgt die

(b) *Formalisierung:* Rest 1 bedeutet für n: $n = 3 \cdot k + 1$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Das heißt für $n+2$:

$$\mathbf{n}+\mathbf{2} = (3 \cdot k + 1) + 2 = 3 \cdot k + 3 = \mathbf{3} \cdot (\mathbf{k}+\mathbf{1})$$

für dieses $k \in \mathbb{N}$, also ist $n+2$ tatsächlich durch 3 teilbar.

Entscheidend ist dabei — wie in vielen anderen Fällen auch — die *Wahl der Argumentationsbasis:* Formalisieren wir das Rechnen mit Resten (was der aktuelle AHS-Lehrplan nicht vorsieht) oder überzeugen wir uns durch die Divison mit Rest, die hier natürlich dahinter steckt. (Siehe dazu auch [BUE], S. 106 ff.!)

2. Seien p_1 und p_2 Primzahlzwillinge $\neq (3,5)$. Dann ist

   i) die mittlere Zahl durch 6 teilbar,

   ii) $p_1 \cdot p_2 + 1$ durch 36 teilbar.

   Begründe jeweils (aus [GOE2], S. 58)!

ad i) Sei $p_1 = p$, dann ist klarerweise $p_2 = p + 2$: Somit sind die in Rede stehenden Zahlen p, $p + 1$ und $p + 2$. Eine davon ist sicher durch 3 teilbar! *(— Warum?)* Es muss also $3|p+1$ gelten *(warum?)*, weiters: $2|p + 1$ *(warum?)*, also gilt $6|p + 1$.

ad ii) In unserer Notation ist $p_1 \cdot p_2 = p \cdot (p + 2) = p^2 + 2 \cdot p$, woraus wir $p_1 \cdot p_2 + 1 = p^2 + 2 \cdot p + 1 = (p + 1)^2$ erkennen. Wegen $6|p + 1$ aus i) ist alles gezeigt.

Hier findet also ein Aufbau auf schon erhaltenen Ergebnissen statt, was typisch für die Mathematik, aber nicht für den durch Schularbeiten in lauter mehr oder weniger voneinander unabhängige Abschnitte unterteilten Mathematikunterricht ist. In diesem Fall jedoch wird das Ergebnis aus i) unmittelbar danach in ii) benötigt (und nicht viele Wochen später!), so dass wenigstens en miniature dieses wichtige mathematische Prinzip gezeigt bzw. entdeckt werden kann.

5.3 Bearbeitung

Schriftlich.

5.4 Schulstufe

5. Klasse.

5.5 Lehrplanbezug

Unter *Kompetenzen, die sich auf mathematische Fertigkeiten und Fähigkeiten beziehen, äußern sich im Ausführen der folgenden mathematischen Aktivitäten:* finden sich die Punkte ([LP])

- *Kritisch-argumentatives Arbeiten* umfasst alle Aktivitäten, die mit Argumentieren, Hinterfragen, Ausloten von Grenzen und Begründen zu tun haben; das Beweisen heuristisch gewonnener Vermutungen ist ein Schwerpunkt dieses Tätigkeitsbereiches

- *Formal-operatives Arbeiten* umfasst alle Aktivitäten, die auf Kalkülen bzw. Algorithmen beruhen, also das Anwenden von Verfahren, Rechenmethoden oder Techniken

- *Experimentell-heuristisches Arbeiten* umfasst alle Aktivitäten, die etwa mit zielgerichtetem Suchen nach Gesetzmäßigkeiten, mit Variation von Parametern oder dem Aufstellen von induktiv gewonnenen Vermutungen zu tun haben; auch das Ausführen von Simulationen, das Untersuchen von Grenz- und Spezialfällen sowie das Übergehen zu Verallgemeinerungen gehören in der experimentellen Phase zu diesen Aktivitäten

Der Bezug des erstgenannten Punktes ist evident, das Rechnen mit Resten (egal auf welcher Argumentationsbasis) hat auch einen formalen Aspekt und jede Teilbarkeitsfrage natürlicher Zahlen kann durch Ausprobieren mit konkreten Zahlen näher präformal untersucht werden. Nur ein Beispiel: der Beweis der Behauptung, von drei aufeinander folgenden natürlichen Zahlen ist immer (genau) eine durch drei teilbar kann durch die Frage motiviert werden, wie viele „Primzahldrillinge" es gibt. Die Beispiele $(\mathbf{3}, 5, 7)$, $(5, 7, \mathbf{9})$, $(13, \mathbf{15}, 17)$ etc. zeigen sehr rasch, worum es dabei geht.

Die *Aspekte der Mathematik* zählen u. a. auf:

- *Schöpferisch-kreativer Aspekt:* Mathematik ist eine Schule des Denkens, in der Arbeitstechniken vermittelt, Strategien aufgebaut, Phantasie angeregt und Kreativität gefördert werden

- *Autonomer Aspekt:* Mathematische Gegenstände und Sachverhalte bilden als geistige Schöpfungen eine deduktiv geordnete Welt eigener Art, in der Aussagen — von festgelegten Prämissen ausgehend — stringent abgeleitet werden können; Mathematik befähigt damit, dem eigenen Denken mehr zu vertrauen als fremden Meinungsmachern und fördert so den demokratischen Prozess

- *Erkenntnistheoretischer Aspekt:* Mathematik ist eine spezielle Form der Erfassung unserer Erfahrungswelt; sie ist eine spezifische Art, die Erscheinungen der Welt wahrzunehmen und durch Abstraktion zu verstehen; Mathematisierung eines realen Phänomens kann die Alltagserfahrung wesentlich vertiefen

Der letztgenannte Aspekt ist hier — abweichend von der Beschreibung im Lehrplan — innermathematisch gemeint. (Elementare) Zahlentheorie — wozu Teilbarkeitsfragen natürlicher Zahlen gehören — ist das Paradebeispiel für das Untersuchen geistiger mathematischer Schöpfungen, wenngleich mittlerweile auch außermathematische Anwendungen von Ergebnissen der Zahlentheorie, etwa beim Verschlüsseln von Nachrichten, bekannt sind. Die Untersuchung der Teilbarkeit des Produktes $P = n \cdot (n + 1) \cdot (n + 2)$ durch sechs geschieht mittels Fallunterscheidung: was passiert, wenn n durch drei teilbar ist, wenn Rest eins oder zwei bleibt? Dieser (systematischen) Vorgangsweise liegt eine Idee zugrunde, also letztlich ein schöpferisch-kreativer Akt.

Im Abschnitt *Lehrstoff* werden in der fünften Klasse im Kapitel *Zahlen und Rechengesetze* die Punkte

- *Arbeiten mit Primzahlen und Teilern,*
- *Untersuchen von Teilbarkeitsfragen*

für das Realgymnasium genannt.

5.6 Begründung

Fallunterscheidungen gehören als mathematische Grundtätigkeit zu den wichtigsten Beiträgen der(s) Mathematik(unterrichts) zur Allgemeinbildung überhaupt. Das *Übersetzen* des Angabetextes in die (Formel-)Sprache der Mathematik gelingt hier leicht, weil es sich durchwegs um innermathematische Problemstellungen handelt.

Entscheidend ist hier also das Achten auf die *Vollständigkeit* einerseits der Fallunterscheidungen, damit die Argumentation wasserdicht ist, andererseits aber auch der Begründungen, das zeigen die drei Hinweise *(„Warum?“)* in 2 i) .

5.7 Eigene Erfahrungen

Bei Lehrer/innenfortbildungen sind diese Aufgaben immer als „ganz normale“ präsentiert worden, die mit geringer Akzentverschiebung Wesentliches zum Thema „Erklären und Begründen“ beitragen können. Leicht kann man analoge Aufgaben finden, die dann die Schüler/innen alleine oder zu zweit mit hoher Erfolgswahrscheinlichkeit wegen der starken Analogie bearbeiten können.

5.8 Komplexität

Sie wird als mittel eingestuft, letztlich läuft es immer auf dasselbe hinaus: Analysieren von und Rechnen mit Resten bei Division einer natürlichen Zahl durch eine andere, wenn nicht die multiplikative Struktur der zu untersuchenden Zahl schon genug Aufschluss liefert.

5.9 Problemlösungsstrategie

Das Analysieren der multiplikativen Struktur von natürlichen Zahlen und Fallunterscheidungen nach Restklassen sind bei den hier vorgestellten Aufgaben ausreichend (neben den genannten Voraussetzungen).

6 Apropos „Sehen“

6.1 Der Kathetensatz statisch und dynamisch: 4. Klasse

Die Seite (24. Juli 2006)
`http://www.austromath.at/daten/lernpfad/pythag1/pyth_kathsatz.html`
zeigt einen „Beweis“ des Kathetensatzes auf *dynamische* Weise.
Zwei Scherungen und eine Drehung verwandeln ein Quadrat in ein flächengleiches Rechteck: $b^2 = c \cdot q$. — Zwei Fragen drängen sich dabei auf:

i) Warum erhalten die Scherungen die Fläche?

ii) Warum „passt“ das gedrehte Parallelogramm genau so in das Dreieck?

Zwei Antworten darauf sind:

i) Gleiche Seite und *gleiche Höhe* darauf.

ii) Eine *Quadrat*seite dreht sich in eine anliegende, also um genau 90°.

Als Alternative bietet sich *eine* Zeichnung an, die sich naturgemäß nicht bewegt: Abbildung 2. Das Quadrat mit der Seitenlänge b ist flächengleich mit dem Pa-

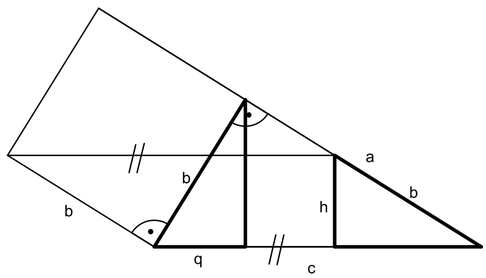

Abbildung 2: Statische Herleitung des Kathetensatzes

rallelogramm mit den Seiten c und b und der Höhe h auf c. Sie haben nämlich die Seite b und die Höhe darauf gemeinsam, das muss man wie oben *sehen*. Die beiden kleinen stark umrandeten Dreiecke sind ähnlich zum ursprünglichen, sie haben eine gleichliegende Seite gemeinsam, b, also sind sie kongruent zueinander. Damit ist $q = h$ und $b^2 = c \cdot q$.

Die Moral von der Geschichte ist, dass ein Bild nicht immer mehr als tausend Worte sagt bzw. präziser: eine Animation, also viele Bilder nicht unbedingt mehr als eine Zeichnung. Das Entscheidende muss *gesehen* werden, so oder so, und dann exakt argumentiert werden. Eine statische Zeichnung verstellt da den Blick unter Umständen weniger als eine Animation, wo alles wie von Zauberhand geschieht.

Einen Kompromiss bietet [BUE], S. 120, mit vier Zeichnungen nebeneinander.

6.2 Quadratzahlen: 5. Klasse

Wenn wir $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$ für $n \in \mathbb{N}$ zeigen wollen, gibt es viele Möglichkeiten: z. B. aus der Formel für die Summe der ersten n natürlichen Zahlen $1+2+\cdots+n = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$, die bekanntlich auf den jungen Gauss zurückgeht und der Formel für die Summe der ersten n geraden Zahlen, die unmittelbar daraus folgt: $2 + 4 + \cdots + 2n = 2 \cdot \text{junger Gauß} = n \cdot (n + 1)$. Damit ist $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = \frac{2n\cdot(2n+1)}{2} - n \cdot (n + 1) = n^2$.

Oder vollständige Induktion ...

Oder: Abbildung 3.

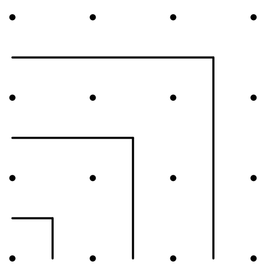

Abbildung 3: Geometrie der Summe der ungeraden Zahlen

Hier sagt wirklich ein Bild mehr als tausend Worte ..., man *sieht* einfach, dass es so stimmt (aus [FREU], S. 196).

6.3 Summenformeln: 6./7. Klasse

Es ist die nicht so populäre Identität

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{i}{k} = \binom{0}{k} + \binom{1}{k} + \cdots + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}$$

zu zeigen. Dazu suchen wir nach *kombinatorischen Situationen* für die *linke* und *rechte* Seite der Gleichung.

Rechts ist (relativ) einfach: Es handelt sich hierbei um die Anzahl der $(n + 1)$-Tupel mit $k + 1$ Einsern und sonst Nullen.

Für die linke Seite teilen wir die $(n+1)$-Tupel nach der Position des „rechtesten" Einsers ein. Wenn diese $i+1$ ist, dann gibt es $\binom{i}{k}$ Möglichkeiten, die restlichen k Einser auf die i Plätze links davon zu platzieren. Die Position $i+1$ kann von eins bis $n+1$ in einem $(n+1)$-Tupel laufen, also i von null bis n .

Mit dieser Formel gelingt es uns, Summenformeln für Potenzen der natürlichen Zahlen zu finden: Den Beginn macht $\sum_{i=0}^{n} i = \sum_{i=0}^{n} \binom{i}{1} = \binom{n+1}{2} = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$, woraus wir mit $i^2 = 2 \cdot \binom{i}{2} + \binom{i}{1}$ die Summenformel

$$\sum_{i=0}^{n} i^2 = 2 \cdot \sum_{i=0}^{n} \binom{i}{2} + \sum_{i=0}^{n} \binom{i}{1} = 2 \cdot \binom{n+1}{3} + \binom{n+1}{2}$$

gewinnen. Ein sukzessives Ableiten einer geschlossenen Form für $\sum_{i=0}^{n} i^{\alpha}$ mit $\alpha = 1, 2, \ldots$ ist auf diese Weise möglich (siehe [ANG], S. 109).

Zugegebenermaßen muss man hier schon einiges *sehen*, um voranzukommen.

6.4 Der „verkehrte" Thales: 4. Klasse

Gegeben ist die Abbildung 4 (nach [FREU], S. 197).

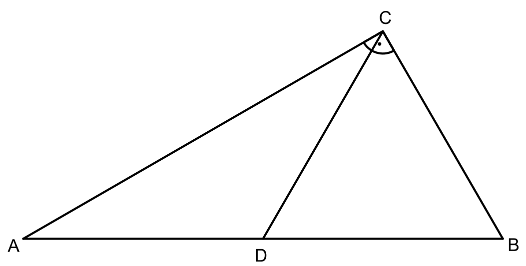

Abbildung 4: $\overline{AD} = \overline{DC} = \overline{CB}$

Zu zeigen ist: $\angle A = 30°$, was zum Beispiel so sehr elegant geht:

Der Kreis k habe Mittelpunkt D und gehe durch A. Damit geht k auch durch C. B muss nun auch auf k liegen, und damit ist das Dreieck DCB gleichseitig. (Den in Abbildung 4 unsichtbaren Kreis k muss man also *sehen*.)

Dazu benötigten wir *die Umkehrung des Satzes von Thales.* Die Formulierung derselben ist nicht ganz einfach (geschweige denn ihre Begründung!):

Alle möglichen der festen Hypotenuse AB gegenüberliegenden Eckpunkte C von rechtwinkeligen Dreiecken ABC liegen auf dem (Halb-)Kreis mit Durchmesser AB, dem Thaleskreis.

Einfacher zu erfassen ist folgender äquivalente Sachverhalt:

Der Umkreismittelpunkt eines rechtwinkeligen Dreiecks liegt auf dem Halbierungspunkt der Hypotenuse.

Im nächsten Abschnitt geht es daher um *Formulierungen* und *Beziehungen* in der Mathematik bzw. im Mathematikunterricht.

7 Die Sprache (in) der Mathematik

Mathematik hat ihre eigene symbolische Sprache und ihre spezifischen Fachbegriffe entwickelt, aber das ist hier nicht (unbedingt) gemeint. Des Weiteren nämlich wird sie in vielen Sprachen (Deutsch, Englisch, ...) betrieben, wobei dabei aber zu beachten ist, dass die Mathematik auch in diesem Gewande nicht ihre Exaktheit verlieren möchte. Daher kommt es auf die genaue Formulierung in (deutschen) Worten an und auch darauf, dass die Regeln der Logik, die vor allem in der Umgangssprache oft negiert werden, akurat eingehalten werden. Darauf beziehen sich in erster Linie die folgenden Beispiele und Aufgaben. Ein gute Übersicht zu diesem Themenkreis bietet [MSCH], viele konkrete schulnahe Beispiele bzw. Aufgaben [REI].

7.1 Thales kompakt: 4. Klasse

Ein Kreis mit Durchmesser AB sei gegeben.

1. Ist C ein weiterer Punkt auf dem Kreis, dann ist der Winkel $(ACB) = 90°$.
2. Liegt C nicht am Kreis, dann ist der Winkel $(ACB) \neq 90°$.

Das ist nun eine sehr kompakte Version des Satzes von Thales und seiner Umkehrung. Diese Formulierung der Umkehrung unterscheidet sich deutlich von der vorigen, wird sie beispielsweise in Gruppenarbeit mit Unterstützung des Lehrers/der Lehrerin erarbeitet, so bringt dieser Prozess des Ringens um eine richtige Formulierung ein hohes Maß an (mathematischer) Einsicht für die Schüler/innen mit sich. Das fertige Produkt sagt hier besonders wenig über den eigentlichen Gewinn für die Lernenden aus.

7.2 Notwendig — hinreichend — äquivalent: 5. Klasse

Gerade notwendige und hinreichende Bedingungen werden im Alltag sehr oft nicht richtig verwendet, vielleicht sogar verstanden. Hier hat der Mathematikunterricht eine wichtige Funktion der Bewusstmachung und Klarstellung für die

Schüler/innen und leistet so auch einen wesentlichen Beitrag zur Allgemeinbildung, denken wir nur an die Kunst des überzeugenden Argumentierens — ganz unabhängig von der Mathematik.

Konkret sehen wir uns nochmals das Teilen natürlicher Zahlen durch neun an: $9 \mid n \Leftrightarrow 9 \mid$ Ziffernsumme von n. Wozu eigentlich $\Rightarrow$? Wenn wir schon wissen, dass die Zahl durch neun teilbar ist, wen interessiert dann noch die (Teilbarkeit der) Ziffernsumme? — Diese Richtung ist für die *Negation* entscheidend: $9 \nmid n \Leftrightarrow 9 \nmid$ Ziffernsumme von n. Jetzt ist $\Leftarrow$ wichtig!

Noch deutlicher wird die Sache, wenn wir annehmen, es gelte nur $\Leftarrow$ in der ursprünglichen positiven Formulierung. Welche Konsequenzen ergäben sich daraus? — Hier kompetent antworten zu können ist ein wesentliches Lehrziel des Abschnitts „Die Sprache der Mathematik" in [GOE2]. Im Lehrplan finden wir dazu: „*Sprachlicher Aspekt:* Mathematik ist ein elaboriertes Begriffsnetz, ein ständiges Bemühen um exakten Ausdruck, in dem die Fähigkeit zum Argumentieren, Kritisieren und Urteilen entwickelt sowie die sprachliche Ausdrucksfähigkeit gefördert werden" ([LP]).

Es gäbe dann natürliche Zahlen, die durch neun teilbar sind, nicht aber ihre Ziffernsumme. Das heißt aber umgekehrt, dass aus der Tatsache, dass die Ziffernsumme einer bestimmten Zahl nicht durch neun teilbar ist, nicht folgt, dass die Zahl selbst nicht durch neun teilbar ist.

7.3 Formulierung der Umkehrung

1. EINFACH: *Lehrsatz des Pythagoras* — 4. Klasse

   Ein Dreieck, dessen Seitenlängen a, b und c die Beziehung

   $$a^2 + b^2 = c^2$$

   erfüllen, ist ein rechtwinkeliges.

2. SCHWIERIG: *Peripheriewinkelsatz* — 4./5. Klasse

   Die Scheitel aller Winkel konstanter Größe φ ($0° < \varphi < 180°$), deren Schenkel durch zwei feste Punkte A und B gehen, liegen auf einem Kreisbogen durch A, B mit dem Zentriwinkel 2φ (aus [LAU], S. 237).

3. ABER AUCH — 3. Klasse (nach [WAL], S. 385f.):

   Wenn $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = -2$, dann ist $(a+b)^2 = 0$ für $a, b \neq 0$.

   (a) Finde einen Beweis!

   (b) Formuliere die Umkehrung! Stimmt diese? — Wenn ja, Beweis, wenn nein, Gegenbeispiel!

8 Vom In- zum Ankreis — Analogiebildung in der 4. Klasse

8.1 Inkreis

Satz 3.

$$A = \rho \cdot s \ ,$$

wobei A der Flächeninhalt des Dreiecks ist, ρ sein Inkreisradius und s der halbe Umfang desselben.

Beweis: In Abbildung 5 erkennen wir die Zerlegung des ursprünglichen Dreiecks

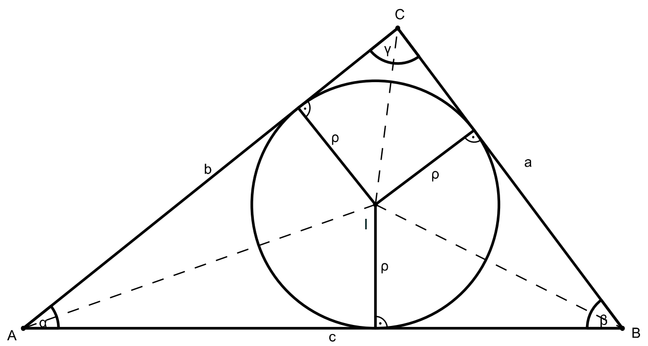

Abbildung 5: Zum Inkreisradius eines Dreiecks

in drei Teildreiecke mit gleicher Höhe. Diese ist gerade der Inkreisradius. Die Gesamtfläche ist die Summe der drei Teilflächen:

$$A = c \cdot \frac{\rho}{2} + a \cdot \frac{\rho}{2} + b \cdot \frac{\rho}{2} = \frac{\rho}{2} \cdot (a + b + c) = \rho \cdot s \ .$$

□

8.2 Ankreis

Satz 4.

$$A = (s - a) \cdot \rho_a = (s - b) \cdot \rho_b = (s - c) \cdot \rho_c \ ,$$

Bezeichnungen wie eben, a, b, c sind die Dreiecksseitenlängen und ρ_a, ρ_b, ρ_c sind die entsprechenden Ankreisradien.

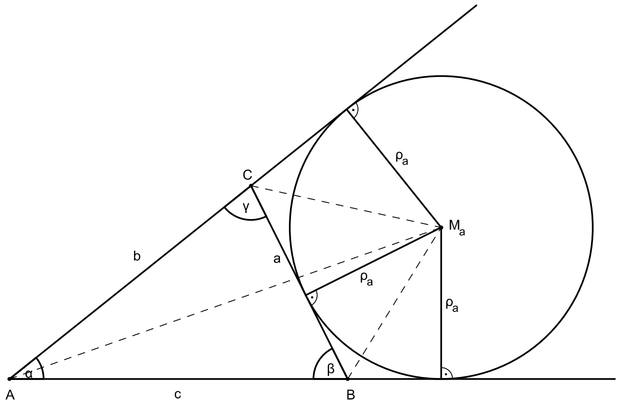

Abbildung 6: Zum Ankreisradius eines Dreiecks

Beweis: Wieder (vgl. Satz 3) ist die Idee, den Flächeninhalt des Dreiecks mit Hilfe der Flächen anderer Dreiecke darzustellen, erfolgreich: Mit Abbildung 6 erkennen wir:

$$A_{\Delta ABC} = A_{\Delta ABM_a} + A_{\Delta ACM_a} - A_{\Delta BCM_a} \ .$$

Daher ist

$$A = \frac{c \cdot \rho_a}{2} + \frac{b \cdot \rho_a}{2} - \frac{a \cdot \rho_a}{2} = \frac{\rho_a}{2} \cdot (c + b - a) = \rho_a \cdot (s - a) \ .$$

□

8.3 Zusatzfragen

Diese Thematik bietet viele weitere unmittelbare Möglichkeiten zum Begründen und Erklären:

- Warum schneiden einander die Winkelsymmetralen eines Dreiecks in einem Punkt?
- Wieso ist dieser Schnittpunkt der Mittelpunkt des In- bzw. der Ankreise?
- Wieso stimmt die Formel für den Flächeninhalt eines Dreiecks, nämlich Grundlinie mal Höhe durch zwei, auch, wenn die Höhe außerhalb des Dreiecks liegt?

Starke Analogien wie die hier vorgestellten laden zur Selbsttätigkeit der Schüler/-innen ein: Wenn eine Idee ein zweites Mal trägt, ist die Hoffnung, dann *selbst* den Beweis zu finden, nicht unbegründet. Aus der Argumentation, warum der Schnittpunkt der Winkelsymmetralen der Innenwinkel eines Dreiecks der Mittelpunkt des Inkreises ist, ist die Begründung, warum der Schnittpunkt der Winkelsymmetralen der Außenwinkel bzw. eines Innenwinkels (Abbildung 6) eines Dreiecks der Mittelpunkt des Ankreises ist, der die Dreiecksseite, die der Ecke des verwendeten Innenwinkels gegenüberliegt, berührt, nicht allzu schwer abzuleiten. In [BUE], S. 124 heißt das „Führen von Beweisen in einem (eng begrenzten) Stoffgebiet, die nach einem Muster ablaufen, das dem Schüler von einem Beweis im gleichen Stoffgebiet bekannt ist“.

8.4 Weitere Analogien

1. Aus der Teilbarkeitsregel für die Division natürlicher Zahlen durch neun ist jene für die Division durch drei leicht zu gewinnen.

2. Wer weiß, warum der Umkreismittelpunkt eines Dreiecks der Schnittpunkt der Seitensymmetralen ist, der/die kann sich ohne größere Schwierigkeiten überlegen, warum der Inkreismittelpunkt eines Dreiecks der Schnittpunkt der Winkelsymmetralen der Innenwinkel ist.

3. Der Beweis des jungen Gauss der Identität

   $$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

   (siehe auch 6.2) ist für n *gerade* sofort einsichtig, wir teilen die n Zahlen paarweise — kleinste–größte, zweitkleinste–zweitgrößte, usw. — auf, und so weiter und so fort. Was aber passiert, wenn n *ungerade* ist? — Dann geht es (fast) genauso!

9 „Pythagoras“ im Raum — Verallgemeinerung in der 5./6. Klasse

Vorbemerkung: Der aktuelle AHS-Lehrplan ([LP]) sieht in der fünften und sechsten Klasse *Lösen von geometrischen Aufgaben, gegebenenfalls unter Einbeziehung der Elementargeometrie (und der Trigonometrie)* vor. Einen Beitrag dazu liefert die hier vorgestellte Aufgabe (aus [POL], S. 63ff.).

Abbildung 7 zeigt eine *abgeschnittene Würfelecke.* Was gilt für die Flächeninhalte A, B, C, D der vier Seiten?

Es ist

$$A^2 + B^2 + C^2 = D^2 \ .$$

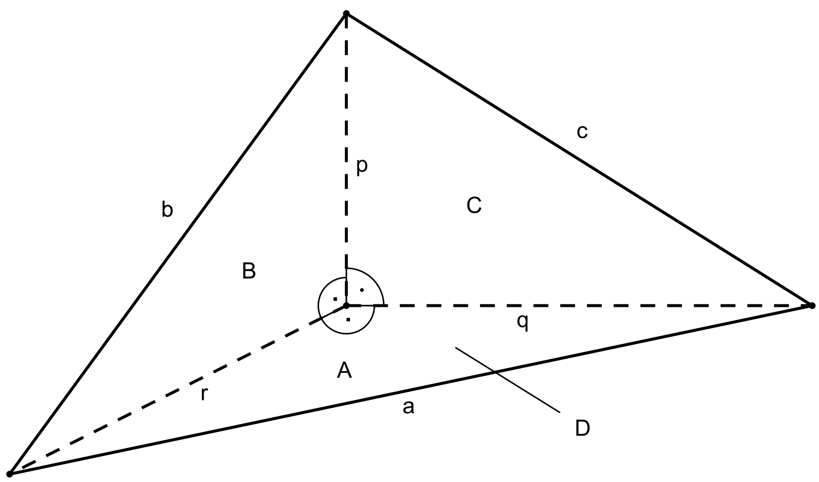

Abbildung 7: Eine abgeschnittene Würfelecke und ihre Folgen ...

9.1 Erster Versuch

Die Heron'sche Flächenformel liefert $D^2 = s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)$ mit $s = \frac{a+b+c}{2}$. Weiters finden wir $a^2 = q^2 + r^2$, $b^2 = p^2 + r^2$ und $c^2 = p^2 + q^2$ (dreimal Pythagoras in der Ebene) und $A = \frac{q \cdot r}{2}$, $B = \frac{p \cdot r}{2}$ und $C = \frac{p \cdot q}{2}$ (dreimal Flächeninhaltsformel für das Dreieck). Die Bezeichnungen sind in Abbildung 7 erklärt.

Das sind insgesamt *sieben* Gleichungen mit *sieben* Unbekannten, das sieht nach viel Arbeit aus. Geht es leichter auch? [Es ist i. Allg. höchst verfänglich, diese Frage zu stellen, in der Mathematik, im Mathematikunterricht, wo auch immer. Sinnvoll ist sie nur dann, wenn die positive Antwort (dem Lehrer/der Lehrerin) bekannt ist. Hier hat sie vor allem rhetorischen Charakter.]

9.2 Ein neuer Anfang

In Abbildung 8 erkennen wir $D = \frac{a \cdot h}{2}$, $h^2 = k^2 + p^2$ und $A = \frac{a \cdot k}{2}$. Damit berechnen wir

$$\begin{aligned} 4 \cdot D^2 &= (a \cdot h)^2 = a^2 \cdot h^2 = a^2 \cdot (k^2 + p^2) = a^2 \cdot k^2 + a^2 \cdot p^2 = \\ &= 4 \cdot A^2 + (q^2 + r^2) \cdot p^2 = \\ &= 4 \cdot A^2 + p^2 \cdot q^2 + p^2 \cdot r^2 = 4 \cdot A^2 + 4 \cdot C^2 + 4 \cdot B^2 \ . \end{aligned}$$

Daraus folgt $D^2 = A^2 + B^2 + C^2$ (z. B. ist $13^2 = 12^2 + 4^2 + 3^2$).

Bemerkungen:

- Es ist wichtig die Erfahrung zu machen, dass scheinbar gute Ideen nicht

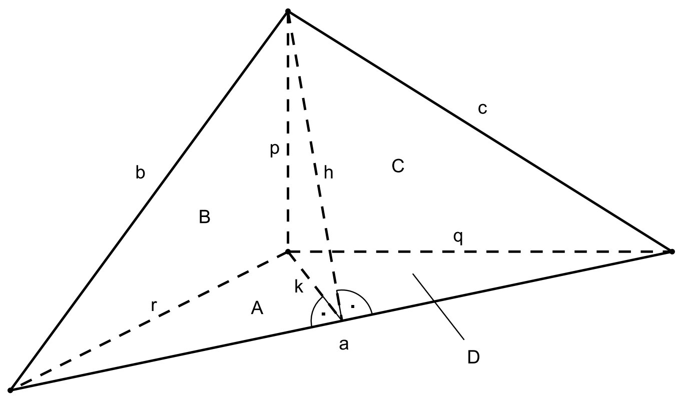

Abbildung 8: Eine abgeschnittene Würfelecke: zweiter Versuch

immer zum Ziel führen. Es ist dann oft ganz schwierig, eingefahrene Wege zu verlassen und neue zu suchen bzw. zu finden.

- Hier: eine Idee (die „richtige“) führt schon zum Ziel, der Rest ist konsequentes Anwenden des ebenen Pythagoras.

- Folgende Entsprechungen zwischen Pythagoras in der Ebene und im Raum, wie das hier verstanden wird, ist festzuhalten:

Längen der Seiten eines rechtwinkeligen Dreiecks	Flächeninhalte der Begrenzungsflächen einer abgeschnittenen Würfelecke

10 Fußball — eine Extremwertaufgabe ohne Differenzieren: 5./7. Klasse

An *Vorkenntnissen* setzen wir hier die üblichen Additionstheoreme für Winkelfunktionen und die sogenannte Mittelungleichung voraus:

$$\sqrt{a \cdot b} \leq \frac{a+b}{2} \quad a, b \in \mathbb{R}^+ \ ,$$

denn: siehe Abbildung 9.

Gleichheit besteht offensichlich (Abbildung 9) genau dann, wenn $a = b$ ist.

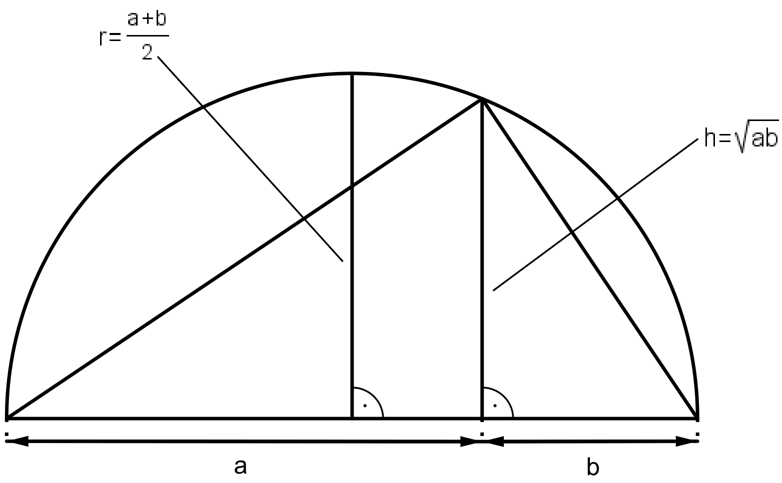

Abbildung 9: Geometrischer Beweis der Mittelungleichung

Die *eigentliche Aufgabe* lautet so: Ein Fußballer läuft geradlinig im rechten Winkel auf die Toroutlinie zu, so dass die gedachte Verlängerung seiner Bahn g neben dem Tor (Breite a) im Abstand b die Outlinie schneidet. In welchem Abstand x zur Toroutlinie h ist der Schusswinkel α auf das Tor für den Spieler am größten (siehe auch [GOE1])?

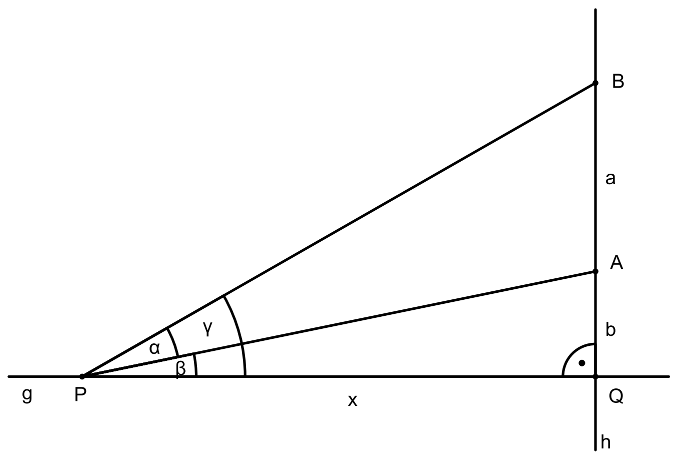

Abbildung 10: Zum Fußballproblem

Mit Abbildung 10 erkennen wir

$$\begin{aligned}
\tan\alpha &= \tan(\gamma-\beta) = \frac{\tan\gamma - \tan\beta}{1+\tan\gamma\cdot\tan\beta} = \\
&= \frac{\frac{a+b}{x} - \frac{b}{x}}{1+\frac{a+b}{x}\cdot\frac{b}{x}} = \frac{\frac{a}{x}}{\frac{x^2+(a+b)\cdot b}{x^2}} = \frac{a\cdot x}{x^2+(a+b)\cdot b} = \\
&= \frac{a}{\underbrace{x+\frac{(a+b)\cdot b}{x}}_{:=f(x)}} \, .
\end{aligned}$$

Weil der tan eine monotone Funktion ist (in einem passenden Definitionsbereich), können wir auch $\tan\alpha$ maximieren, um den optimalen, also größtmöglichen Winkel α zu bestimmen. Der Zähler von $\tan\alpha$ hängt gar nicht von x ab, der Nenner, also $f(x)$ muss minimal werden, um insgesamt den Bruch groß zu machen. Also $f(x)$ wird genau dann minimal, wenn $x = \frac{(a+b)\cdot b}{x}$ ist bzw. $x^2 = (a+b)\cdot b$ gilt, woraus $x = \sqrt{b\cdot(a+b)}$ folgt.
Die Erklärung liefert die *Mittelungleichung*. Wenn $A\cdot B = \text{const.} = k$ ist, dann wird $f(A,B) := A+B$ minimal, wenn $A = B$ ist, denn: $\sqrt{k} = \sqrt{A\cdot B} \leq \frac{A+B}{2}$ und Gleichheit stellt sich genau dann ein, wenn $A = B$ ist.

Für die fünfte Klasse bietet sich eine geometrisch gestützte Antwort dieser Frage an.

In Abbildung 11 ist $\overline{CA} = \overline{CB}$. Wir behaupten nun, dass der Kreis k durch A,

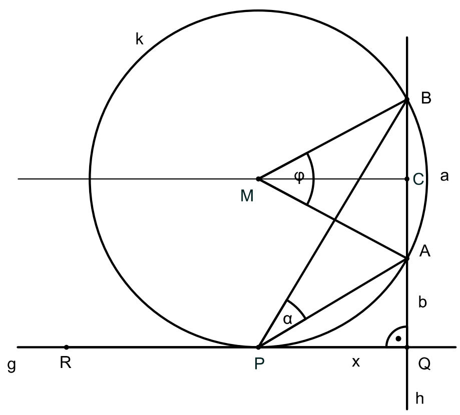

Abbildung 11: Zur geometrischen Lösung des Fußballproblems

B mit Radius $r = \overline{CQ}$ g im optimalen Punkt P berührt.

Die *Begründung* liefert die Einsicht, dass $\angle BRA < \angle BPA \;\forall R$ außerhalb von k ist, weil: $\alpha = \frac{\varphi}{2}$ mit $\varphi = \angle AMB$ (Zentriwinkel). Der Kreis durch A, B und R hat einen *kleineren* Zentriwinkel, denn sein Mittelpunkt ist weiter von $\overline{AB}$ entfernt, weil sein Radius größer ist als der von k.

Der *Sekanten-Tangenten-Satz* (siehe z. B. [GOE3], S. 180) liefert $\overline{QP}^2 = \overline{QA} \cdot \overline{QB}$, also $x^2 = b \cdot (b + a)$ wie oben.

11 Was sagt der Lehrplan?

11.1 AHS-Unterstufe, HS

Argumentieren und exaktes Arbeiten, insbesondere:

- präzises Beschreiben von Sachverhalten, Eigenschaften und Begriffen (Definieren);
- Arbeiten unter bewusster Verwendung von Regeln;
- Begründen (Beweisen);
- Arbeiten mit logischen Schlussweisen;
- Rechfertigen von Entscheidungen (etwa der Wahl eines Lösungsweges oder einer Darstellungsform)

finden wir unter der Überschrift *Unterrichtsziele und Unterrichtsinhalte* im Abschnitt „Mathematische Grundtätigkeiten“ ([LP]).

11.2 AHS-Oberstufe: siehe 5.5

12 Maturaaufgaben

12.1 Wasserhyazinthen am Victoriasee

Der Victoriasee hat eine Fläche von $68\,000\,\mathrm{km}^2$ und ist damit der größte See Afrikas und der drittgrößte See der Welt. Im Bericht der Weltnaturschutzkommission aus dem Jahr 2001 wird der Victoriasee unter die gefährdeten Biotope eingereiht. Die Gefährdung ist allerdings nicht künstlich von Menschen gemacht, sondern von einer Pflanze — der Wasserhyazinthe. Sie vermehrt sich so schnell, dass sich die von ihr bedeckte Fläche (A) alle zwei Wochen verdoppelt.

a) Nimm an, dass anfangs nur eine Fläche $A = 1\,\mathrm{m}^2$ des Sees mit Wasserhyazinthen bedeckt ist, und erläutere durch numerische Berechnung und grafische Darstellung, was Verdopplung alle zwei Wochen bedeutet! (2 Punkte)

b) Beschreibe das Wachstumsverhalten der Wasserhyazinthen in Worten anhand der in a) ermittelten Grafik! Um welches Wachstum handelt es sich? (1 Punkt)

c) Das Wachstum der Wasserhyazinthen wird durch die Funktion

$$A(t) = De^{kt}$$

beschrieben. Bestimme für diese Gleichung D und k und stelle die Lösungsfunktion grafisch dar! Um wie viel Prozent wächst der Wasserhyazinthenbestand in einer Woche? (4 Punkte)

d) Nach welcher Zeit ist der Victoriasee zugewachsen? (1 Punkt)

e) In der Meldung der süddeutschen Zeitung vom 23.10.1998 (siehe *Beilage*) wird eine Schutzmaßnahme für den Victoriasee beschrieben. Fasse zusammen, wie die Anrainerstaaten des Victoriasees das Wasserhyazinthenproblem in den Griff bekommen wollen! Diskutiere, wie dadurch das Wachstum verändert wird! (4 Punkte)

Beilage

Von der Schönheit zur Plage
Der Victoriasee droht unter Wasserhyazinthen zu verschwinden

Aufgrund dieser Brisanz des Problems einigten sich Kenia, Uganda und Tansania auf eine gemeinsame Schutzmaßnahme.

Die Länder importierten Rüsselkäfer aus Südafrika, Australien und Westafrika und setzten sie an ihren Ufern des Victoriasees aus. Diese kleinen, 3,5 bis 5 Millimeter langen Käfer benutzen die Pflanze als Wirtin. Die erwachsenen Käfer fressen kreisrunde Löcher in die Blattoberfläche sowie in die oberen Teile des Blattstieles. In die so entstandenen Einbuchtungen legen sie ihre Eier. Die Larven bohren sich ins Innere des Blattstieles. Diese Benutzung von Blatt- und Pflanzenstielen trifft die Pflanze ins Mark — sie sinkt tiefer ins Wasser, fault und stirbt ab. Auf diese Weise hält man schon seit Jahren in Argentinien, Australien, Indien und den USA die Wasserhyazinthenbestände auf einem erträglichen Maß. Es zeichnet sich auch hier in Ostafrika ein Erfolg bei der Bekämpfung der Wasserhyazinthe ab. Es besteht keine Gefahr, dass die Käfer sich zur Plage ausbreiten können, da sie ohne Wasserhyazinthen nicht leben können. So wird sich in absehbarer Zeit ein natürliches Gleichgewicht von Käfern und Hyazinthen einstellen.

Süddeutsche Zeitung, 23.10.1998

Disposition zu e)

Die Länder, die an den Victoriasee angrenzen setzen Rüsselkäfer am Seeufer aus. Diese ernähren sich von den Blättern und Blattstielen der Wasserhyazinthe. Dadurch stirbt die Pflanze ab und in absehbarer Zeit wird sich ein Gleichgewicht zwischen Käfern und Hyazinthen einstellen. Die Vorgänge des Wachstums der Hyazinthen bzw. der Käfer beeinflussen einander.

Das Wachstum der Hyazinthen (A) wird beeinflusst von:

- Wachstumsfaktor k für die Hyazinthen
- „Fressfaktor" f der Rüsselkäfer (d. h. wie viele Hyazinthen ein Rüsselkäfer pro Tag frisst)
- der Anzahl R der Rüsselkäfer

Daraus ergibt sich der Ansatz

$$dA/dt = A(k - fR) \ .$$

Die Vermehrung der Rüsselkäfer ist abhängig von:

- Wachstumsfaktor der Rüsselkäfer k_R
- vorhandenem Futtervorrat A
- den natürlichen Verlusten V

Daraus ergibt sich der Ansatz

$$dR/dt = R(k_R A - V) \ .$$

Je nachdem wie groß diese Faktoren sind, ergeben sich zyklische Schwankungen um einen Mittelwert. Es ergeben sich also Strukturen, die mit jenen auf den Volterra-Lotka-Gleichungen basierenden kontinuierlichen Räuber-Beute-Modell zu vergleichen sind (grafische Darstellung zur Illustration).

12.2 Bevölkerungswachstum

Im Jahre 1960 gab es ca. $3 \cdot 10^9$ Menschen auf der Erde, bis 1977 wuchs die Zahl auf $4,1 \cdot 10^9$. Es sei $N(t)$ die Bevölkerungszahl t Jahre nach 1960.

a) Stelle eine Formel für $N(t)$ unter der Voraussetzung auf, dass (ungebremstes) exponentielles Wachstum vorliegt! Skizziere den Verlauf der Funktion! (3 Punkte)

b) Wie viele Menschen würden nach diesem Modell 1990 gelebt haben? (1 Punkt)

c) Wie viele Menschen würden nach diesem Modell in den Jahren 2100 und 2200 leben? (2 Punkte)

d) Man nimmt an, dass auf der Erde höchstens $20 \cdot 10^9$ Menschen leben können. In welchem Jahr würde diese Grenze nach diesem Modell erreicht sein? Vergleiche deine Ergebnisse mit deinen Berechnungen aus c) und interpretiere die Daten! (2 Punkte)

e) Im beiliegenden Artikel der Marburger Zeitung vom 1.3.2001 (siehe *Beilage:* Abbildung 12) werden verschiedene Prognosen zur künftigen Entwicklung der Erdbevölkerung gemacht. Fasse diese zusammen und nenne Gründe und Bedingungen für die unterschiedlichen Prognosen! Vergleiche diese Prognosen mit den von dir in den Aufgaben a) bis d) ermittelten Daten für die Weltbevölkerung und interpretiere mögliche Unterschiede! (4 Punkte)

Disposition zu e)

Es gibt drei Prognosen:
Hohe Prognose: 2050 leben 10,9 Milliarden Menschen, es gibt keinen Wachstumsstopp.
Mittlere Prognose: 2050 leben 9,3 Milliarden Menschen, die Wachstumsrate verringert sich ab etwa 2025 stark.
Niedrige Prognose: 2050 leben 7,9 Milliarden Menschen, die Wachstumsrate verringert sich ab 2015 und die Weltbevölkerung nimmt ab 2050 ab.
Ausschlaggebend für die verschiedenen Prognosen ist der zu erwartende Babyboom in der dritten Welt, in den Industrieländern stagniert die Bevölkerung. Die Art der Prognose hängt also von der Eindämmung der Geburtenrate in den Entwicklungsländern ab.
Das Modell aus a) sagt wesentlich mehr Menschen vorher, die Prognose ist jedoch unrealistisch, da die Wachstumsrate in der Realität nicht konstant bleibt. Das mathematische Modell ist daher nicht günstig gewählt.

13 Abschlussbemerkung

Erklären und Begründen im Mathematikunterricht ist eine vielschichtige Angelegenheit. Das ist einmal die inhaltliche Dimension, dann die pädagogische (welche Unterrichtsform eignet sich warum in einer speziellen Situation ganz besonders?), die jedenfalls die *Eigentätigkeit* der Schüler/innen betonen sollte. Dabei ist es aber besonders wichtig, dass der Lehrer/die Lehrerin mit großer Sorgfalt die zu beweisenden mathematischen Behauptungen hinsichtlich einer voraussichtlich

Statistiker warnen vor Babyboom in Dritter Welt

Neun Milliarden Menschen bevölkern Erde in 50 Jahren

New York (dpa). Die Welt wird in rund 50 Jahren von gut 9,3 Milliarden Menschen bevölkert sein. Damit werden im Jahr 2050 nach Prognosen der Vereinten Nationen vom Mittwoch 3,2 Milliarden Menschen mehr als jetzt auf der Erde leben.

Ausschlaggebend dafür sei der erwartete Babyboom in der Dritten Welt. In den Industrieländern stagniere die Bevölkerungszahl. Die Einwohnerzahl Deutschlands und Japans werde in 50 Jahren sogar um jeweils 14 Prozent geschrumpft sein, heißt es in dem Bericht „Revision 2000 der Weltbevölkerungsprognose" der Abteilung für Wirtschaft und Soziales am UN-Hauptsitz in New York.

Dank der höheren Lebenserwartung von dann durchschnittlich 82 Jahren werden in den europäischen Ländern bis zum Jahr 2050 zwei Senioren auf ein Kind kommen.

Die Menschheit vermehrt sich nach der UN-Statistik zur Zeit um 1,2 Prozent oder 77 Millionen Babys pro Jahr. Die Hälfte des Zuwachses entfällt auf nur sechs Länder. Indien hat mit einem Bevölkerungsplus von 21 Prozent im Jahr den weitaus größten Anteil, gefolgt von China mit 12 Prozent, Pakistan mit 5 Prozent, Nigeria und Bangladesch mit jeweils 4 und Indonesien mit 3 Prozent. Die Bevölkerung in den Industrieländern liegt bei 1,2 Milliarden Menschen.

Quelle: Neue Marburger Zeitung 1.3.2001. Nach: Mathematik, Gymnasiale Oberstufe, Analysis, Cornelsen 2002, S. 168

Abbildung 12: Beilage zur zweiten Maturaaufgabe

großen Erfolgswahrscheinlichkeit für die Schüler/innen aussucht. Mathematische Begründungen zu finden ist oft eine sehr zähe Angelegenheit, Schüler/innen (und zwar nicht nur die sogenannten „Begabten“) sollten jedoch dabei eine große Chance haben, die, besser: eine Lösung zu finden.

Die Motivationsfrage spielt bei diesem Aspekt des Mathematikunterrichts vielleicht eine noch größere Rolle als sonst. Neben der Lustlosigkeit, die aus mangelndem Erfolg resultiert (soeben), ist die Frage „Warum überhaupt beweisen?“ eine durchaus berechtigte: Allenfalls in Kriminalangelegenheiten kommt dieser Begriff in der Erfahrungswelt der Schüler/innen noch substantiell vor. Aussagen von Lehrer/innen, die im Unterricht präsentiert werden, werden von Schüler/innen i. Allg. nicht in Zweifel gezogen, geschweige denn ein Beweis verlangt. Warum also hier? Die innermathematische Antwort ist klar: Zusammenhänge zwischen mathematischen Objekten machen geradezu die Mathematik aus, ihre auf diese Weise gefundenen Wahrheiten sind in gewisser Weise ewig gültig. Der Nachteil dabei ist allerdings, dass es sich hierbei um Denkobjekte handelt, die außerhalb unserer Vorstellung nicht vorkommen. Haben Sie schon einen Kreis in der Realität gesehen?

Die fachdidaktisch-pädagogische auch: präzises Argumentieren ist auch außerhalb der Mathematik bzw. des Mathematikunterrichts gefragt, so dass hierbei ein wertvoller Beitrag zur Allgemeinbildung der Schüler/innen geliefert wird.

Aber was den Schüler/innen antworten? — Die Inhalte des Mathematikunterrichts beginnen erst zu leben, wenn sie in Beziehung zueinander gesetzt werden, wenn über sie gesprochen wird, wenn mit ihnen argumentiert wird. In Wahlpflichtfächern oder bei (freiwilligen!) mündlichen Maturen funktioniert das auch, nur im Regelunterricht nicht. Eine Ursache dafür liegt sicher im Diktat der ewigen Schularbeiten, die das ganze Schüler/innen- (und Lehrer/innen-!) -leben begleiten, und die das Nachdenken über eine Sache, das sich darin Vertiefen, die Möglichkeit, auch Irrwege zu gehen, nicht gleich „das Richtige" zu finden, so unmöglich machen, das alles passt sogar nicht zum real existierenden Mathematikunterricht. „Das Wesen der Mathematik liegt in ihrer Freiheit" heißt es bei Georg Cantor und natürlich hatte er dabei nicht den Mathematikunterricht im Sinne, dennoch sei hier zum Schluss die These aufgestellt, dass die im Lehrplan geforderten Aktivitäten des Argumentierens und Begründens im Mathematikunterricht erst zufriedenstellend umgesetzt werden können, wenn alternative Leistungsbeurteilungen nicht die Ausnahme sondern die Regel sind und somit ihr Attribut „alternativ" verloren haben. Das jetzige reguläre Beurteilungssystem ist ein zu knappes Korsett für die erfolgreiche Auseinandersetzung der Schüler/innen mit den in Rede stehenden Aktivitäten.

Ziel des Ganzen ist es, eine Haltung in den Schüler/innen zu initiieren, die Fragen nach dem Warum stellt und fundierte, das heißt begründete Antworten darauf versucht zu geben, die nach möglichen Zusammenhängen oder Querverbindungen sucht, die Argumentationen kritisch prüft, die Behauptungen hinterfragt, aber solche auch aufstellt, die über Analogien nachdenkt, die Einfälle hat, die keine Zufallstreffer sind, sondern aufgrund von Vorerfahrungen und zielgerichtetem Forschen entstehen, kurz: eine Haltung, die kreative und reflektierende Elemente ausmachen.

Dieser Beitrag ist sehr praxisorientiert ausgerichtet, wer mehr über theoretische Grundlagen des Argumentierens und Begründens im Mathematikunterricht wissen möchte, der/die sei nochmals auf [BUE] verwiesen. Überhaupt bietet der alte, aber gute Band [DOE] eine große Vielfalt von Sichtweisen zum Thema, wenngleich manche Beiträge darin mittlerweile schon sehr aus der Mode gekommen sind. Eine gute Übersicht ist in Abschnitt 5 von [TIE] zu finden, dort sind auch viele weitere Literaturhinweise nachzulesen.

Literatur

[ANG] D'Angelo, John P. and West, Douglas B.: *Mathematical Thinking. Problem-Solving and Proofs.* Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ 07458 2000 (second edition).

[BOE] Boero, Paolo: *Argumentation and mathematical proof: A complex, productive, unavoidable relationship in mathematics and mathematics education.* In: International Newsletters on the Teaching and Learning of mathematical Proof, 7/8 (1999). Zitiert aus: Reiss, Kristina: *Argumentieren, Begründen, Beweisen im Mathematikunterricht.* Manuskript ohne Jahr.

[BUE] Bürger, Heinrich: *Beweisen im Mathematikunterricht — Möglichkeiten der Gestaltung in der Sekundarstufe I und II.* In [DOE], S. 103–134.

[DOE] Dörfler, Willibald und Fischer, Roland: *Beweisen im Mathematikunterricht.* Schriftenreihe Didaktik der Mathematik, Universität für Bildungswissenschaft in Klagenfurt, Band 2. Hölder-Pichler-Tempsky, Wien und B. G. Teubner, Stuttgart 1979.

[FREU] Freudenthal, Hans: *Konstruieren, Reflektieren, Beweisen in phänomenologischer Sicht.* In [DOE], S. 183–200.

[GOE1] Götz, Stefan: *Zur geometrischen Lösung eines Extremwertproblems und eine analytische Ergänzung;* erschienen in: PM 2/**45. Jg.** 2003 (Schwerpunktheft 28: Geometrie V), S. 69–73.

[GOE2] Götz, Stefan und Reichel, Hans-Christian (Hrsg.): *Mathematik-Lehrbuch 5* von Robert Müller und Günter Hanisch. öbv&hpt, Wien 2004 (Nachdruck 2006).

[GOE3] Götz, Stefan und Reichel, Hans-Christian (Hrsg.): *Mathematik-Lehrbuch 7* von Robert Müller und Günter Hanisch. öbv&hpt, Wien 2006.

[KEL] Keller-Ressel, Marianne, Sidlo, Eva-Maria und Winter, Helga: *Blickpunkt Mathematik 1 für die 1. Klasse der allgemein bildenden höheren Schulen und der Hauptschulen.* öbv&hpt, Wien 2002.

[KUB] Kuba, Gerald und Götz, Stefan: *Zahlen;* erschienen in der Reihe „Fischer Kompakt". Fischer Taschenbuch Verlag, Frankfurt am Main 2004.

[LAU] Laub, Josef, Hruby, Eugen, Körperth, Wilhelm und Schmid, Anton: *Mathematik Arbeitsbuch 4.* Hölder-Pichler-Tempsky, Franz Deuticke, Jugend und Volk, Leykam, Pädagogischer Verlag, Wien–Graz 1977.

[LP] *Lehrplan für AHS-Unter- und -Oberstufe:* `http://www.oepu-noe.at/recht/lp/index.htm` (25. Juli 2006).

[MSCH] Maier, Hermann und Schweiger, Fritz: *Mathematik und Sprache. Zum Verstehen und Verwenden von Fachsprache im Unterricht.* Mathematik für Schule und Praxis, Band 4. Herausgegeben von Hans-Christian Reichel. öbv&hpt, Wien 1999.

[MAL] Malle, Günther: *Begründen. Eine vernachlässigte Tätigkeit im Mathematikunterricht;* erschienen in: mathematik lehren 110 (2002), S. 4–8.

[POL] Pólya, Georg: *Vom Lösen mathematischer Aufgaben. Einsicht und Entdeckung, Lernen und Lehren. Band 1.* Birkhäuser Verlag, Basel und Stuttgart 1966.

[REI] Reichel, Hans-Christian: *Sprachschulung und Spracheinsatz im Mathematikunterricht.* In: *Mathematik lehren und lernen.* Festschrift für Heinz Griesel herausgegeben von Helmut Postel, Arnold Kirsch und Werner Blum. Schroedel Schulbuchverlag, Hannover 1991, S. 156–169.

[TIE] Tietze, Uwe-Peter, Klika, Manfred und Wolpers, Hans: *Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II. Band 1: Fachdidaktische Grundfragen – Didaktik der Analysis.* Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden 1997.

[WAL] Walsch, Werner: *Zur Entwicklung von Fähigkeiten im Beweisen im Mathematikunterricht mittlerer Klassen.* In [DOE], S. 379–395.

Anschriften der Verfasser/innen:

Mag. Dr. Eva Sattlberger

Institut für Bildungswissenschaft
Universität Wien
Maria-Theresien-Straße 3
A-1090 Wien

Brigittenauer Gymnasium
Karajangasse 14
A-1200 Wien

`Eva.Sattlberger@univie.ac.at`

Ao. Univ.-Prof. Mag. Dr. Stefan Götz

Fakultät für Mathematik
Universität Wien
Nordbergstraße 15 (UZA 4)
A-1090 Wien

Akademisches Gymnasium
Beethovenplatz 1
A-1010 Wien

`Stefan.Goetz@univie.ac.at`